УДК 519.175.1 Вестник УрФО № 4(14)/2014. Стр. 45–48

Горяинов С. В., Исакова Г. С.

СВЯЗНОСТЬ ВТОРОЙ ОКРЕСТНОСТИ В КОРЕБЕРНО-РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ ДЕЗА

В работе классифицированы кореберно-регулярные графы Деза с несвязной второй окрестностью. В целом решена классическая задача комбинаторики и теории графов, в частности, перечисление комбинаторных объектов с заданными свойствами. Изучение графов Деза представляет интерес в связи с тем, что графы Деза имеют диаметр 2 и являются естественным обобщением сильно регулярных графов. Для данного класса графов проблема проверки изоморфизма представляется потенциально сложной. Предложенный в работе подход, возможно, позволит обобщить полученные результаты.

Ключевые слова: *теория графов, графы Деза, кореберно-регулярные графы, графы с несвязной второй окрестностью, изоморфизм графов.*

Goryainov V. S., Isakova G. S.

CONNECTION OF THE SECOND NEIGHBOURHOOD IN COADJOINT REGULAR DEZA GRAPHS

The article classifies coadjoint regular Deza graphs with unconnected second neighborhood. The authors solve the classical problem of combinatorics in general and graph theory in particular; they implement the transfer of combinatorial objects with specified properties. Studying of Deza graphs is of high interest due to the fact that they have the diameter of 2 and are a natural generalization of strongly regular graphs. For this class of graphs the problem of testing isomorphism seems potentially complicated. The approach proposed in the article may allow generalizing the results.

Keywords: *theory of graphs, Deza graphs, coadjoint regular graphs, graphs with unconnected second neighborhood, isomorphism of graphs.*

Задача, изучаемая в данной работе, является классической для многих областей дискретной математики - задача существования объектов с заданными комбинаторными свойствами. Изучаемые в работе графы представляют интерес в алгебраической и алгоритмической теории графов и могут быть рассмотрены с различных точек зрения.

В 1998 году в работе [3] впервые было рассмотрено естественное обобщение понятия сильно регулярного графа - графы Деза. Авторы указали на базовые соотношения в графах Деза и предложили несколько конструкций.

Сильно регулярные графы интересны для изучения как минимум с двух точек зрения.

С одной стороны, сильно регулярные графы образуют класс графов, для которых особенно сложна задача проверки изоморфизма графов. Это связано с высоким уровнем внутренней симметрии и особенностями метрических соотношений в графе. С другой стороны, для изучения сильно регулярных графов могут применяться алгебраические методы, в частности, матричный анализ. Так, за исключением тривиальных случаев, матрица смежности сильно регулярного графа имеет ровно 3 различных собственных значения. Отметим, что задача перечисления сильно регулярных графов на данный момент не решена.

Графы Деза имеют схожие метрические соотношения, и поэтому задача проверки изоморфизма для данного класса графов потенциально сложна.

В ряде исследований было выяснено, что графы Деза наследуют некоторые свойства сильно регулярных графов. Например, в [1] показано, что вершинная связность графа Деза, полученного из сильно регулярного графа с помощью инволюции, совпадает с валентностью.

Однако данное обобщение приводит и к потере части свойств. Например, в [2] было показано, что существует граф Деза, имеющий сколь угодно большое число различных собственных значений.

Одним из методов изучения графов Деза является наложение свойств и, как следствие, получение структурных ограничений на граф, классификация графов с заданными свойствами.

Особого внимания заслуживает работа [4], в которой получены соотношения для графов Деза без 3-коклик, описаны некоторые свойства и в частных случаях получена классификация таких графов.

В работе [5] классифицированы реберные графы Деза.

В настоящей работе классифицированы все графы Деза с несвязной второй окрестностью.

Для начала рассмотрим связность окрестности в сильно регулярном графе. В следующем абзаце приводится теорема, описывающая связные сильно регулярные графы с несвязной второй окрестностью.

Теорема. Если в связном сильно регулярном графе Γ хотя бы одна из вершин имеет несвязную вторую окрестность, то Γ – это полный многодольный граф.

Доказательство:

Возьмем $x \in V(\Gamma)$ с несвязной второй окрестностью. Пусть $u,v \in \Gamma_2(x)$ - произвольные вершины из второй окрестности. Вершины x и v не смежны, значит имеют μ общих соседей, причем все эти соседи находятся в $\Gamma(x)$, то есть вершина v имеет ровно μ соседей в $\Gamma(x)$, аналогично вершина u имеет ровно μ соседей в $\Gamma(x)$.

Покажем, что u и v имеют одних и тех же μ соседей в $\Gamma(x)$.

Пусть сначала вершины u и v лежат в разных компонентах связности $\Gamma_2(x)$. В этом случае u не смежна с v, и вершины u и v имеют μ общих соседей. u и v лежат в разных компонентах связности $\Gamma_2(x)$, следовательно, общих соседей могут иметь только в $\Gamma(x)$, но каждая из вершин u и v имеет ровно μ соседей в $\Gamma(x)$, отсюда следует, что это одни и те же μ соседей в $\Gamma(x)$, то есть любые две вершины из разных компонент связности $\Gamma_2(x)$ (x) имеют одних и тех же μ соседей в $\Gamma(x)$.

Покажем, что любые две вершины v_1, v_2 из одной компоненты связности в $\Gamma_2(x)$ имеют одних и тех же μ соседей в $\Gamma(x)$. Рассмотрим вершину u из другой компоненты связности. Так как v_1 и u из разных компонент связности, то по доказанному они имеют одних и тех же соседей в $\Gamma(x)$. Аналогично, v_2 и u имеют одних и тех же μ соседей в $\Gamma(x)$. Отсюда v_1 и v_2 имеют одних и тех же μ соседей в $\Gamma(x)$.

Далее сделаем разбор случаев.

Если $k = \mu$, то граф Γ – полный многодольный граф.

Допустим теперь, $k \neq \mu$, то есть $\mu < k$, и в $\Gamma(x)$ есть вершины, не смежные с любой вершиной из $\overline{\Gamma}(x)$. Рассмотрим такую вершину y. Тогда y может иметь соседей, кроме вершины x, только в $\Gamma(x)$. Всего в $\Gamma(x)$ находится k вершин, следовательно, кроме у в $\Gamma(x)$ находится $k - 1$ вершин, но вершина у имеет всего k соседей, таким образом соседями вершины у являются вершина x и указанные выше $k - 1$ вершин. Так как $x \sim y$, и они имеют $k - 1$ общих соседей, следовательно, $\lambda = k - 1$. Воспользуемся следующим равенством $k(k - 1 - \lambda) = (n - k - 1)\mu$. Получим, что либо $\mu = 0$, либо $n = k + 1$, из чего следует, что граф Γ - либо дизъюнктное объединение клик (что противоречит условию связности), либо клика, что противоречит условию сильной регулярности, т. е. в случае $\mu < k$ получили противоречие. ■

В работе результат был обобщен для кореберно-регулярных графов Деза, соответственно, далее приводятся формулировка и

доказательство основного результата данной работы.

Теорема. Если в кореберно-регулярном точном графе Деза Γ существует вершина с несвязной второй окрестностью, то Γ изоморфен реберному расширению полного многодольного графа.

Доказательство:

Пусть (n,k,b,a) – параметры кореберно-регулярного точного графа Деза Γ. Заметим, что $a < b$, иначе Γ – сильно регулярный. Пусть μ – число общих соседей двух несмежных вершин, тогда имеет место два случая:

1) $a = \mu$;

2) $b = \mu$.

1) $a = \mu$

Пусть u – вершина, вторая окрестность которой несвязна, тогда все вершины из $\Gamma_2(u)$ имеют одних и тех же μ общих соседей в $\Gamma(u)$. Обозначим через M множество из μ вершин. Так как $a = \mu < b \leq k$, то M - это строгое подмножество в $\Gamma(u)$, то есть $\Gamma(u)\backslash M$ не пусто. Заметим, что вершина из $\Gamma(u)\backslash M$ не имеет соседей в $\overline{\Gamma}(u)$, следовательно, смежна со всеми остальными вершинами в $\Gamma(u)$, кроме самой себя, то есть $b = k - 1$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ – компоненты связности графа $\Gamma_2(u)$. Покажем, что это клики размера $k - \mu + 1$.

Рассмотрим компоненту произвольную компоненту A_i. Пусть в ней найдется пара несмежных вершин, но тогда найдется пара несмежных вершин x_1, x_2 на расстоянии 2, следовательно, x_1, x_2 имеют μ общих соседей в $\Gamma(u)$ и еще как минимум одного в $\Gamma_2(u)$. Противоречие с кореберной регулярностью. Отсюда следует, что коребер нет, значит A_1 – это клика. В силу условия регулярности, A_1 будет содержать $k - \mu + 1$ вершину.

Заметим, что множество $\Gamma(u)\backslash M \cup \{u\}$ – это также клика размера $k - \mu + 1$. Таким образом, граф Γ можно представить как t клик $(t \geq 3)$ размера $k - \mu + 1$, каждая вершина из этих клик смежна с каждой из μ вершин из множества M.

Пусть x – вершина из некоторой клики K размера $k - \mu + 1$, а y – вершина из множества M. Посчитаем количество общих соседей вершин x и y. Внутри клики K эти вершины имеют $k - \mu$ общих соседей, а внутри множества M имеют $k - (n - \mu)$ общих соседей (все соседи вершины y в множестве M). Таким образом, всего вершины x и y имеют $k - \mu + k - (n - \mu) = 2k - n$ общих соседей. Поскольку вершина y имеет как минимум двух соседей в других кликах, и эти вершины не являются соседями x, то число общих соседей x и $y \leq k - 2$, а значит равно $a = \mu$, то есть $2k - n = \mu$, отсюда $k - \mu = n - k$.

Таким образом, размер каждой клики равен $n - k + 1$, но эти клики - это подграфы в $\Gamma_2(u)$, а в $\Gamma_2(u)$ всего $n - k - 1$ вершина. Противоречие.

2) $b = \mu$

В данной ситуации возможно 2 случая:

2.1) $b = \mu = k$

Если $b = \mu = k$, тогда антиокрестность вершины u, объединенная с вершиной u, – это коклика, а окрестность – кореберно-регулярный граф Деза Γ, у которого $b = \mu$. Продолжая рекурсивно этот процесс, получим, что граф Γ является полным многодольным графом.

2.2) $b = \mu < k$

Если $b = \mu < k$, тогда $\Gamma(u)\backslash M$ не пусто, и любая вершина x из $\Gamma(u)\backslash M$ имеет соседей только в $\Gamma(u)$, отсюда вершины u и x имеют $k - 1$ общего соседа, и $b = \mu = k - 1$, отсюда $\Gamma(u)\backslash M$ содержит только одну вершину, а $\overline{\Gamma}(u)$ будет состоять из объединения изолированных ребер. Тогда $\overline{\Gamma}(u)$, объединенная с вершиной u, – это объединение изолированных ребер, а окрестность – кореберно-регулярный граф Деза Γ, у которого снова $b = \mu$. Получаем ситуацию, аналогичную случаю 2.1. Далее, продолжая рекурсивно этот процесс, получим, что граф Γ - реберное расширение полного многодольного графа.

Основной результат данной работы состоит в том, что кореберно-регулярные графы Деза с несвязной второй окрестностью исчерпываются полными многодольным графами с размером доли больше двух и их 2-кликовыми расширениями.

References

1. Gavrilyuk A.L., Goryainov S.V., Kabanov V.V. O vershinnoi svyaznosti grafov Deza [On Vertex Connectivity of Deza Graphs]// Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN. Ekaterinburg, 2013. V. 19, No. 3. p. 94–104.

2. Gavrilyuk A.L., Shalaginov L.V. O grafakh Deza s 4-mya razlichnymi sobstvennymi znacheniyami [On Deza Graphs with Four Different Characteristic Values]// Tezisy Mezhdunarodnoi (43-ei Vserossiiskoi) molodezhnoi shkoly-konferentsii. Ekaterinburg, 2012. p. 20– 23.

3. Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D. and Hemmeter J. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7, P. 359–405.

4. Ermakova G.M.: Dve zadachi algebraicheskoi teorii grafov [Two Tasks of Algebraic Theory of Graphs]// Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uchenoi stepeni kandidata f.-m. n., UrO RAN, Ekaterinburg, 2009.

5. Kabanov V.V., Mityanina A.V. Rebernye tochnye grafy Deza [Adjoint Faithful Deza Graphs]// Tr. IMM UrO RAN, 18:1 (2012), 165–177.

Горяинов Сергей Викторович, преподаватель ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург. E-mail: 44g@mail.ru

Исакова Галина Сергеевна, студент ФГБОУ ВПО «ЧелГУ», г. Челябинск. E-mail: carleink@gmail.com

Viktor Sergeevich Goryainov, lecturer of Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Science, Yekaterinburg. E-mail: 44g@mail.ru

Galina Sergeevna Isakova, student of Chelyabinsk State University, Chelyabinsk. E-mail: carleink@gmail.com